דף תרגילים מס' 4 – טורי טיילור וטורי פונקציות

תרגיל 4.1 חשבו בעזרת טורים את הערכים הבאים בדיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה:

(א) $\frac{1}{e}$, (ב) $\sqrt{e}$, (ג) $\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)$, (ד) $\arctan\frac{1}{3}$.

תרגיל 4.2 כמה איברים של טור מקלורן עבור $\ln(1+x)$ נצטרך כדי לקרב את $\ln(1.4)$ עם שגיאה שאינה עולה על 10^{-3}?

תרגיל 4.3 העריכו את השגיאה עבור הנוסחאות המקורבות הבאות:

(א) $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},\ 0\le x\le 1$, (ב) $\sin x \approx x-\frac{x^3}{6},\ |x|\le\frac{1}{2}$,

(ג) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},\ 0\le x\le 1$.

תרגיל 4.4 עבור איזה תחום של ערכי x הנוסחה $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ נכונה בדיוק של 0.0001?

תרגיל 4.5 חשבו בעזרת טורים את האינטגרלים הבאים בדיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה:

(א) $\int_0^1 \sin x^2\,dx$, (ב) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^4}$, (ג) $\int_0^{0.5} e^{-x^3}\,dx$.

תרגיל 4.6 פתחו את הפונקציה $\arctan\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ לטור מקלורן.

תרגיל 4.7 השתמשו בטורי טיילור כדי לחשב את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{d^6}{dx^6}\left(\frac{\sin \pi x}{x}\right)$ (ב) $\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2e^x}{1-\cos x}\right)$ (ג) $\lim_{x\to 0}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2e^x}{1-\cos x}\right)$

(ד) $\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{\left(e^x-1\right)^3}\right]$ (ה) $\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left[\frac{x\sin x}{\left(e^x-1\right)^2}\right]$

תרגיל 4.8 בדקו את ההתכנסות במידה שווה של הסדרות הבאות:

(א) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$ בתחום $0\le x\le 1$,

(ב) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ בתחום $-\infty<x<\infty$

(ג) $f_n(x)=\frac{\sin\left(nx\right)}{n}$ בתחום $-\infty<x<\infty$,

(ד) $f_n(x)=e^{n(x-1)}$ בתחום $0<x<1$,

(ה) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ בתחום $0\le x\le 1$.

תרגיל 4.9 בדקו את ההתכנסות במידה שווה של הטורים הבאים:

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^3}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3}\right)$ בתחום $|x|<1$, (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ בתחום $\mathbb{R}$,

(ג) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$ בתחום $[0.5,3]$, (ד) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n(\ln(n))^3}\right)$ בתחום $|x|<3$.

(ה) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ בתחום $0<x<\infty$, (ו) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\left[n/2\right]!}$ בתחום $|x|<a$, $a>0$.

תרגיל 4.10 הראו שהטור $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x-n)}{n}$ מתכנס במידה שווה על $\mathbb{R}$, עבור $f(x)\equiv\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$.
האם הפונקציה הגבולית רציפה?